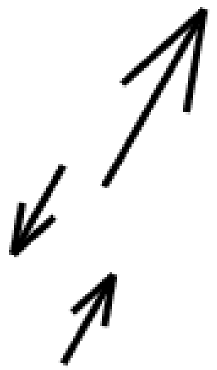
Векторы в геометрии

Прежде, чем перейти к конкретному сопоставлению понятий линейной алгебры и геометрических построений (на плоскости и в пространстве), изложим в этом разделе основные термины, относящиеся к векторам как геометрическим объектам. Возможно, читателю они покажутся слишком тривиальными и не выходящими за рамки школьной программы (тогда он может пропустить этот раздел). Однако, мы находим необходимым сделать это напоминание для выстраивания стройной логической цепочки: сначала (в прошлых разделах) аксиоматически ввести понятия векторов в линейной алгебре, затем (в этом разделе) совершенно независимо и также аксиоматически ввести векторы в аналитической геометрии, и только потом (в следующих разделах) установить жесткое соответствие между понятием вектора с точки зрения линейной алгебры и с точки зрения геометрии. Таким образом, у читателя должно сложиться внутреннее представление в органичном дополнении друг друга этих двух областей математики и ясное понимание геометрического смысла аппарата линейной алгебры.

Определение вектора

С точки зрения геометрии *вектором* (неважно, на плоскости или в пространстве) называется отрезок прямой линии, имеющий направление. Согласно этому определению, вектор может быть направлен в одну из двух сторон прямой, поэтому один из концов вектора называется его *началом*, а другой – *концом*. Таким образом, общей чертой вектора и обычного отрезка является обладание определенной *длиной*, а отличием является тот факт, что вектор имеет еще и *направление* (от начала к концу вектора). Векторы, лежащие на параллельных прямых, называются коллинеарными.

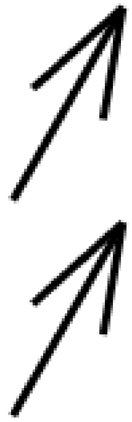


.

Длину вектора **a** будем обозначать символом |**a**| и иногда называть ее синонимами: *нормой*, или *абсолютным значением*, или *модулем* вектора.

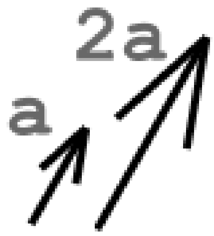
> ***Замечание***
> Важно заметить, что мы вводим здесь понятие векторов и их свойства (в частности, длину) аксиоматически, опираясь исключительно на геометрические представления. Пока (если отбросить туманные замечания об эквивалентности векторов из действительных линейных пространств и векторов из геометрии) понятие вектора, которое мы только что дали, никоим образом не опирается на введенный ранее формализм линейной алгебры. Однако чуть позже будет показано, что, с математической точки зрения, аппарат исследования и тех, и других векторов практически одинаков, что дает нам право называть и элементы множества $\mathbf{R}_n$, и геометрически введенные вектора одним и тем же термином *вектор*.

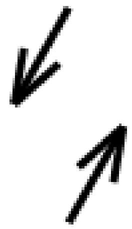
Сразу необходимо подчеркнуть, что определение вектора не включает идентификацию ни его начальной, ни конечной точки. В связи с этим, все векторы, имеющие одинаковую длину и одинаковое направление, называются *равными*, независимо от положения их начальных точек. Поэтому справедливо следующее правило: векторы можно перемещать (по плоскости или по пространству), не меняя их направления и длины (т.е. параллельно самим себе). Такое преобразование векторов не меняет их, оставляя равными самим себе. Очевидно, что коллинеарные векторы одинаковой длины являются равными.



Умножение вектора на скаляр

Произведением вектора **a** и скалярной величины λ называется вектор, направленный так же, как и вектор **a** и имеющий длину λ|**a**|.





Коллинеарные векторы, имеющие одинаковую длину и противоположное направление, называются *противоположными*. Вектор, противоположный вектору **a**, можно обозначать выражением **a**, т.к. очевидно, что противоположный вектор получается путем умножения исходного на -1.

Нулевым вектором, или *нуль-вектором*, называется вектор, имеющий нулевую длину. Поскольку, с геометрической точки зрения, нуль-вектор вырождается в точку, то говорить о его направлении бессмысленно. Нуль-вектор получается путем умножения любого вектора на скалярный 0.

Скалярное произведение векторов

Если подходить с точки зрения геометрии, то скалярным произведением **a** и **b** можно назвать скаляр, равный $|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|\cdot\cos(\alpha)$, где α представляет собой угол между векторами **a** и **b**.

> ***Замечание***
> Как следует из элементарной геометрии, два неколлинеарных вектора в пространстве (т.е. две непараллельные прямые) определяют некоторую плоскость. Один (меньший) угол, образованный этими прямыми и называют углом между векторами. Если векторы коллинеарны, то угол между ними равен нулю.

Угол между векторами

Можно определить с точки зрения геометрии скалярное произведение векторов **a** и **b**, как скаляр, равный $|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|\cdot\cos(\alpha)$, где α представляет собой угол между векторами **a** и **b**.

> ***Замечание***
> Как следует из элементарной геометрии, два неколлинеарных вектора в пространстве (т.е. две непараллельные прямые) определяют некоторую плоскость. Один (меньший) угол, образованный этими прямыми и называют углом между векторами. Если векторы коллинеарны, то угол между ними равен нулю.