

§2. Томография

Томография является очень характерным примером задач интерпретации эксперимента, принадлежащих к классу *обратных задач*. Томография применяется в самых различных областях науки – медицине (диагностика), физике твердого тела (неразрушающий контроль), геофизике (дистанционное зондирование) и т.д.

Рассмотрим постановочную часть типичной задачи томографии (рис. 4). Один из самых распространенных ее типов – это лучевая томография, основанная на геометрооптической физической модели переноса зондирующего излучения, что означает пренебрежение дифракционными эффектами.

Типичный томографический эксперимент заключается в том, что исследуемый образец «просвечивается» зондирующим излучением под разными углами, например, как это показано на рис. 4. Для этого тем или иным способом организуется перемещение относительно образца передатчика и/или приемника (на рис. 4 они обозначены метками «tr» и «res» соответственно).

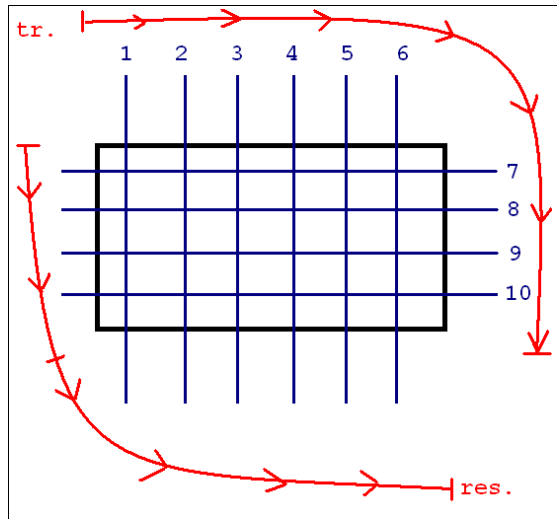


Рис. 4. Иллюстрация принципа томографии

В ходе эксперимента обычно регистрируется определенная характеристика излучения, прошедшего через образец, например, амплитуда, фаза, разность фаз, доплеровское смещение частоты или т.п. Излучение может быть акустическим или электромагнитным, в зависимости от выбранной технологии. Число траекторий также может быть различным. В частности, к показанным на рис. 4, могут быть добавлены диагональные траектории или, напротив, сама специфика эксперимента может ограничивать их набор. Например, для геофизической томографии, использующей в качестве источников излучения искусственные спутники Земли (ИСЗ), характерен ограниченный набор траекторий (рис. 5).

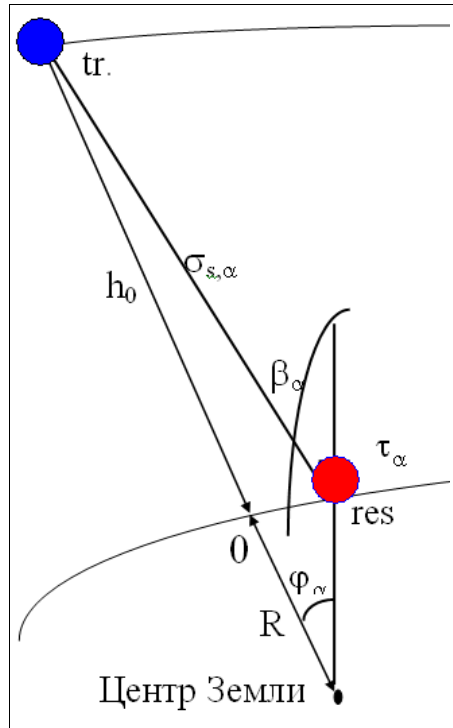


Рис. 5. Геофизическая томография (верная томография)

Ключевым моментом является интегральная зависимость указанной характеристики от исследуемых свойств образца. Например, пространственное распределение показателя поглощения в образце $\alpha(x,y)$ определяет ослабление интенсивности зондирующего излучения ΔI_k :

$$\Delta I_k = \int_{L_k} \alpha[l(x,y)] dl \quad (16)$$

Символом $L_k=l(x,y)$ мы обозначили траекторию k -го луча. Таким образом, вклад в интеграл (16) (в общем случае, криволинейный) дает распределение $\alpha(x,y)$ вдоль луча $l(x,y)$. Имея набор

измерений (16) для серии траекторий ($k=1\dots K$), можно попробовать реконструировать само поле $\alpha(x,y)$.

Получается типичная обратная задача: записывая интеграл (16) в дискретном виде на пространственной сетке, которой покрывается образец, мы, в конечном счете, получим систему алгебраических уравнений вида:

$$\mathbf{A}\mathbf{y} = \mathbf{b}, \quad (17)$$

где в качестве неизвестного вектора \mathbf{y} фигурирует массив значений $\alpha(x,y)$ в узлах сетки. О самих принципах дискретизации будет написано ниже, на примере верной томографии. Предполагается, что реконструируемое поле $\alpha(x,y)$ содержит информацию об исследуемой внутренней структуре образца (например, как правило, более плотные участки лучше поглощают излучение, а пустоты, напротив, имеют нулевое поглощение).

Если вспомнить, что при натуральных измерениях всегда присутствует шумовая компонента (которая в данном случае складывается, по крайней мере, из погрешностей измерений и погрешностей дискретизации интеграла), то мы приходим к уже хорошо знакомой линейной системе измерений (5):

$$\mathbf{A}\mathbf{y} + \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{b}. \quad (18)$$

Специфика задачи томографии заключается, как правило, во-первых, в плохой обусловленности матрицы \mathbf{A} (т.к. используются близкие траектории) и, во-вторых, в ее большой размерности. Если рассматривается не плоский (как в нашем случае), а трехмерный образец, и по каждой координате интервал дискретизации включает 100 узлов, то неизвестный вектор \mathbf{y} будет содержать 10^6 элементов. Если измерений на порядок больше, то размер матрицы \mathbf{A} составит $10^6 \times 10^7 = 10^{13}$ элементов. Поэтому задачи томографической реконструкции, как правило, являются очень громоздкими и требуют серьезных вычислительных ресурсов. Даже используя мощности современных компьютеров, приходится задумываться об

оптимизации хранения элементов матрицы A и скорости работы алгоритма реконструкции.

Рассмотрим теперь пример геофизической томографии (рис. 5) и с его помощью разберемся, как осуществляется дискретизация задачи. В экспериментах по зондированию земной атмосферы на искусственном спутнике Земли (ИСЗ), движущемся по околоземной орбите, располагают передатчик электромагнитного излучения. На поверхности Земли находится один или множество приёмников, которые фиксируют тот или иной параметр прошедшей электромагнитной волны (например: амплитуду, фазу, поляризацию, угол прихода, частоту и т.п.).

Поскольку сигнал проходит в пространстве между спутником и приёмником путь в атмосфере, то в измеряемом параметре сигнала, в качестве которого, для определенности, выберем фазу Φ , содержится информация о состоянии атмосферы вдоль траектории луча.

Соотношение между измеряемым параметром Φ и интересующей характеристикой атмосферы, а именно, показателем преломления вдоль луча $n(x,y)$ выражается интегральной зависимостью:

$$\Phi_k = \int_{L_k} n[x,y] dl \quad (19)$$

По-прежнему, через $L_k=l(x,y)$ мы обозначаем траекторию k -го прямолинейного луча. Имея набор интегралов типа (19) для серии положений спутника в разные моменты времени, можно ставить задачу реконструкции $n(x,y)$ по серии экспериментальных данных. Таким образом, обращая данную систему интегральных уравнений относительно $n(x,y)$ тем или иным вычислительным методом, можно получить решение как функцию показателя преломления пространственных координат.

Для окончательной формулировки вычислительной задачи необходимо записать (19) в дискретном виде. Для этого производится разбиение атмосферы на конечные элементы (например, прямоугольные).

Мы будем использовать не прямоугольную систему координат (x, y) , а более естественную для сферически-симметричной Земли, ортогональную систему (τ, H) , в которой координатами являются криволинейное расстояние по поверхности Земли τ и высота над поверхностью Земли H . Пусть в плоскости пролёта спутника на Земле расположено M_R радиоприёмников. Их координаты равны $(\tau_\alpha, 0)$, $\alpha = 1 \dots M_R$.

Начало координат $\tau=0$ свяжем, ради определённости, с положением ИСЗ в момент старта зондирования и будем рассматривать промежуток высот $H_D \dots H_U$. Координаты орбиты спутника в каждый момент времени $\tau_0(t)$, $H_0(t)$ считаются заданными. Будем считать, что орбита ИСЗ – круговая, т.е. $H_0(t) = H_0$. Каждый радиоприёмник фиксирует всего M_T измерений в моменты времени $t = t_s$, $s = 1 \dots M_T$.

Ценой смены системы координат будет потеря прямолинейности луча, уравнение траектории которого в системе координат (τ, H) несложно получить путем геометрических преобразований:

$$h_{s,\alpha}(\tau) = \frac{R \cos \beta_{s,\alpha}}{\cos[\beta_{s,\alpha} + \frac{\tau_\alpha - \tau}{R}]} - R. \quad (20)$$

Соответственно, вместо интеграла (19) следует вычислять интеграл

$$\phi_{s,\alpha} = \int_0^{h_0} \frac{n(h, \tau(h))(R+h)dh}{\sqrt{R^2 \sin^2 \beta_{s,\alpha} + 2Rh + h^2}}. \quad (21)$$

Теперь для дискретизации задачи разобьем рассматриваемый слой атмосферы на $(N_\tau - 1)(N_H - 1)$ клеток, прямоугольных в (τ, H) – координатах, в $(N_\tau \times N_H)$ точках пересечения (узлах) которых показатель преломления n^{ij} , где $i = 1, \dots, N_\tau$ и $j = 1, \dots, N_H$, подлежит реконструкции.

Итак, мы определились со значением $n(\tau, H)$ в узлах сетки. Осталось указать, чему равна эта функция в других точках пространства между узлами. Очевидно, что выразить её необходимо тем или иным образом через значение n^{ij} в бли-

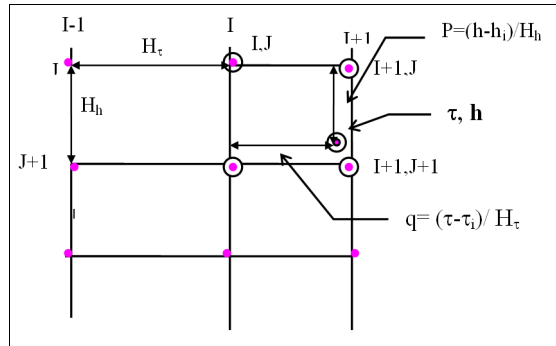


Рис. 6. Сетка

жайших к данной точке узлах. На рис. 6 изображен (i, j) -й (по индексу верхнего левого узла) элемент сетки (τ, h) .

Для того, чтобы наиболее просто определить значение $n(\tau, H)$ в каждой точке (τ, H) этого конечного элемента, можно просто считать, что $n(\tau, H) = n^{ij}$. Такая аппроксимация называется *кусочно-постоянной*. Ошибка при этом имеет порядок пространственного шага, а интеграл (21), соответственно, будет рассчитываться методом прямоугольников.

Такая точность редко бывает достаточной. Поэтому необходимо использовать более высокий порядок аппроксимации, например, *кусочно-планарную*. В этом случае функция $n(\tau, H)$ внутри каждой клетки заменяется линейной функцией по каждой переменной:

$$n(\tau, H) = (1-q)(1-p) n^{ij} + q(1-p) n^{i+1, j} + p(1-q) n^{i, j+1} + qpn^{i+1, j+1}, \quad (22)$$

где

$$0 \leq q = \frac{\tau - \tau_i}{H_\tau} \leq 1, \quad 0 \leq p = \frac{h - h_i}{H_h} \leq 1. \quad (23)$$

Ещё меньшую погрешность даёт *кусочно-квадратичная* аппроксимация по шести точкам, когда функция $n(\tau, H)$ заменяется кривой второго порядка и т.д. Существует множество способов аппроксимировать $n(\tau, H)$, каждый из которых приведёт, в итоге, к определению своей матрицы A .

Выбрав вид аппроксимации, несложно завершить процедуру построения матрицы \mathbf{A} . Для этого остается подставить аппроксимацию (22) в интеграл (21) и подсчитать эти интегралы во всех клетках, в которых побывает (s, α) -ый луч, рассматривая n^{ij} в качестве неизвестных коэффициентов пропорциональности. Аналитически интегралы (21) в данном случае не берутся, поэтому их приходится считать каким-либо численным методом, например, Симпсона. Потом следует сгруппировать подобные слагаемые при каждом n^{ij} , чтобы в итоге получить соотношение:

$$\Phi_{s, \alpha} = F_{s, \alpha, i, j} n^{i, j}, \quad (24)$$

в котором в матрицу (точнее, тензор) \mathbf{F} заложены численные значения соответствующих интегралов (21) при n^{ij} . Таким образом, мы сформировали модель \mathbf{F} , представляющую математическую постановку задачи веерной томографии.

Четыре индекса элементов матрицы \mathbf{F} в (24) выражают, соответственно, номер луча, номер приемника, а также τ - и H -координаты клетки. Для упрощения их удобно перенумеровать:

$$l = i + (j-1)M_\tau, \quad k = s + (\alpha-1)M_T, \quad (25)$$

где $k = 1 \dots M_T M_R \equiv M_k$, $l = 1 \dots M_\tau M_h \equiv M_l$.

Итак, мы наконец пришли к формулировке вычислительной задачи – решения M_k линейных уравнений относительно M_l неизвестных, которая (если вспомнить о наличии шума разного рода) имеет тот же вид, что и (5):

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{y} + \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{b}. \quad (26)$$

После того, как задача математически полностью сформулирована, остаётся выбрать алгоритм её решения. Эти алгоритмы, преимущественно, являются итерационными, ввиду большой размерности задачи. Например, весьма эффективный и экономичный метод заключается в замене системы уравнений (26) системой линейных неравенств:

$$\mathbf{b} - \varepsilon \leq \mathbf{A} \cdot \mathbf{y} \leq \mathbf{b} + \varepsilon. \quad (26+)$$

Допустимая погрешность ε может быть согласована с уровнем шума σ (если последняя известна). Алгоритмы численного решения (26+) основаны на выборе нулевой итерации вектора \mathbf{y} (из некоторых априорных соображений) и дальнейшем последовательном вычислении невязок уравнений в целях соответствующей корректировки текущего приближения \mathbf{y} .

Завершим параграф несколькими конкретными примерами моделирования прямой задачи (21). На рис. 7–10, полученных при помощи программы Tomography Calculator (которую Вы найдете на компакт-диске) изображены, соответственно, модельное поле $n(\tau, H)$, схема эксперимента, расчет интегральных характеристик зондирующего луча и результат реконструкции.

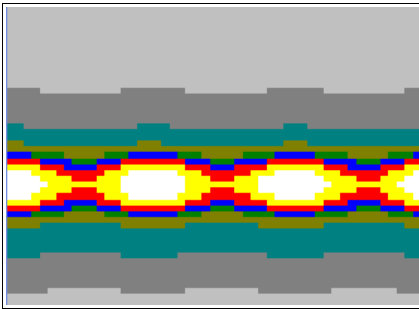


Рис. 7. Модельное поле $n(\tau, H)$

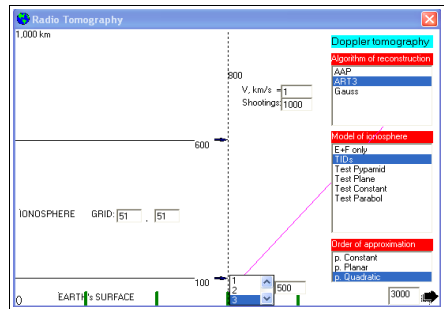


Рис. 8. Модель эксперимента (программа Tomography Calculator)

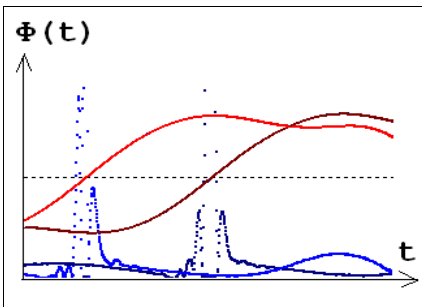


Рис. 9. Модельные измерения (в 2-х точках, кривые) и погрешность аппроксимации (точки)

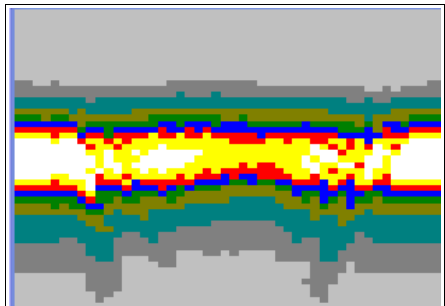


Рис. 10. Результат реконструкции поля $n(\tau, H)$ (алгоритм ART3)

