

§2. Фазовое пространство

Прежде, чем перейти к разговору о численных методах решения задач Коши для ОДУ (см. следующие параграфы), скажем несколько слов о важных аспектах их визуализации, в частности, об отображении на фазовой плоскости или в фазовом пространстве.

Решения обыкновенных дифференциальных уравнений часто удобнее изображать не в привычном виде $u_1(t), \dots, u_N(t)$ (см. рис. 1-4), которые часто называют *растровыми* графиками, а в *фазовом пространстве*, по осям которого откладываются значения каждой из найденных функций. Такой график – фазовый портрет системы – является кривой в фазовом пространстве и поэтому особенно нагляден. Размерность фазового пространства равна (по определению) числу неизвестных N , а аргумент t входит в графики лишь параметрически.

Примеры: биологические взаимодействия

Вернемся к системе уравнений, моделирующей развитие двухвидовой биологической популяции с численностями u_1, u_2 , и рассмотрим сначала модель конкуренции (9), а затем еще две похожих на нее модели.

Конкуренция. Отложим численное решение (9) на координатной плоскости $(u_1(t), u_2(t))$, т.е. нарисуем график зависимости $u_1(u_2)$, в который аргумент функций t (время) будет входить параметрически. Напомним, что мы приводили (в виде растровых графиков) два решения (9) для двух пар начальных условий (см. рис. 3 и 4).

Отложим теперь оба этих решения на фазовой плоскости (рис. 5). Графики решения ОДУ на фазовой плоскости называют *траекториями* и часто сопровождают стрелками, чтобы было ясно, в каком направлении (с течением времени) движется решение. На рис. 5 изображены две траектории, выходящие из разных точек (определяемых парами начальных условий) и асимптотически при $t \rightarrow \infty$ стремящиеся к двум разным точкам фазового пространства, отмеченным на графике маркерами и называемых *аттракторами*.

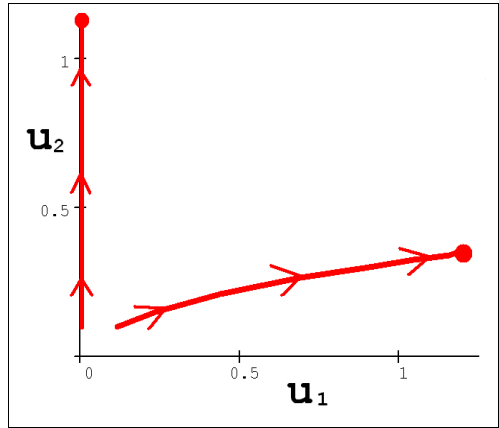


Рис. 5. Два решения системы (9) (на фазовой плоскости)

«Хищник-жертва». Покажем на еще одном примере из области физической экологии, как соотносятся решения, представленные растровыми графиками, и те же решения, представленные в фазовом пространстве. Мы будем использовать знаменитую систему двух ОДУ, предложенную В.Вольтерра:

$$\begin{aligned} \frac{du_1}{dt} &= A_1 u_1 - D_{12} u_1 u_2, \\ \frac{du_2}{dt} &= -D_2 u_2 + A_{21} u_1 u_2. \end{aligned} \quad (12)$$

Данная система описывает динамику двух видов: жертвы u_1 и хищника (или паразита) u_2 . С этой точки зрения, первое слагаемое первого уравнения (для жертв) описывает их естественное размножение (не контролируемое хищниками), а первое слагаемое второго уравнения – естественную смертность хищников (также не зависящую от численности жертв). Вторые слагаемые каждого из уравнений зависят уже как от численности хищников, так и жертв. В частности, это уменьшение

численности жертв в результате их поедания хищниками (первое уравнение) и размножение хищников, зависящее от численности жертв (второе уравнение).

Опять-таки, определив для правильной постановки задачи Коши, в дополнение к уравнениям (12), два начальных условия, можно получить решение данной системы и показать его как в виде зависимости численности каждой из популяций от времени (рис. 6), так и на фазовой плоскости – в виде кривой $u_2(u_1)$ (рис. 7).

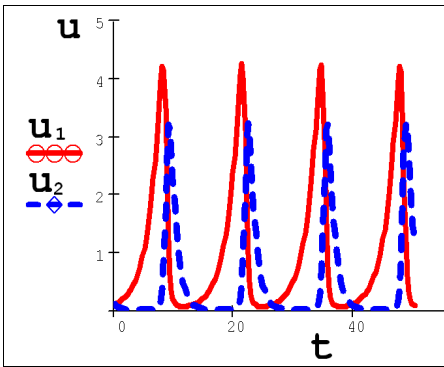


Рис. 6. Растровые графики решения системы ОДУ (12)

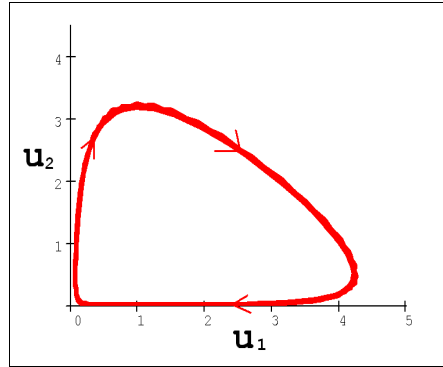


Рис. 7. Решение системы (12) на фазовой плоскости

Как видно из рис. 6 и 7, решением системы (12) является периодическая функция: наблюдается циклическое увеличение и уменьшение численности и хищника, и жертвы, так часто наблюдаемое в природе.

Симбиоз. Еще один характерный пример физической экологии моделирует симбиотические отношения двух видов:

$$\begin{aligned} \frac{du_1}{dt} &= u_1(A_1 - B_{11}u_1 + B_{12}u_2), \\ \frac{du_2}{dt} &= u_2(A_2 + B_{21}u_1 - B_{22}u_2). \end{aligned} \quad (13)$$

Положительные слагаемые уравнений системы (13) с квадратичной нелинейностью описывают положительное влияние

одного вида на другой (это и есть симбиоз), а отрицательные члены – это внутривидовая конкуренция.

Решение системы (13) (при определенных параметрах) показано на рис. 8-9 в виде растровых графиков и на фазовой плоскости соответственно.

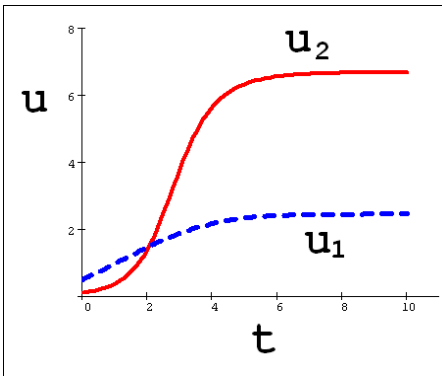


Рис. 8. Растровые графики решения системы (13)

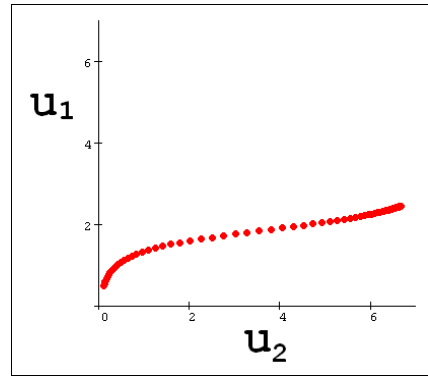


Рис. 9. Решение системы (13) на фазовой плоскости

Хочется обратить внимание на стиль построения графика решений на фазовой плоскости на рис. 9. Решение (кстати говоря, полученное численным методом в форме сеточной функции, о чем речь пойдет в следующих параграфах) отображается точками, каждая из которых соответствует определенному моменту времени. Таким образом, по графику на фазовой плоскости также можно судить и о скорости изменения функций $u_1(t)$ и $u_2(t)$ на разных участках траектории. В этом несложно убедиться, сравнивая его с растровым графиком (рис. 8). Иными словами, такое представление позволяет (хотя косвенно и не в полной мере) визуализировать временную зависимость искомых функций.

Конкуренция трех видов. Стоит отметить, что все рассмотренные примеры описывались системами двух ОДУ. Для числа уравнений $N=2$ фазовое пространство является фазовой плоскостью (т.к. плоскость – это, по определению, пространство размерности 2). Если $N=3$, то фазовым пространством будет

трехмерное координатное пространство. В общем случае, если система состоит из N ОДУ, то фазовое пространство является N -мерным. При $N > 3$ наглядность теряется, и для визуализации фазового портрета приходится строить его различные проекции, либо прибегать к специально разработанной технике построения секущих Пуанкаре.

Рассмотрим модель конкуренции трех видов, предложенную Р.Мэем и В.Леонардом, которая является естественным обобщением системы двухвидовой конкуренции (9). Отличием новой модели является введение дополнительной (третьей) неизвестной функции и, соответственно, третьего динамического уравнения:

$$\begin{aligned}\frac{du_1}{dt} &= u_1(1 - A_{11}u_1 - A_{12}u_2 - A_{13}u_3), \\ \frac{du_2}{dt} &= u_2(1 - A_{21}u_1 - A_{22}u_2 - A_{23}u_3), \\ \frac{du_3}{dt} &= u_3(1 - A_{31}u_1 - A_{32}u_2 - A_{33}u_3).\end{aligned}\tag{14}$$

Динамика численности трех конкурирующих видов описывается тремя функциями u_1 , u_2 , u_3 . Заслуживает особого внимания решение системы (14) для определенного сочетания параметров (т.е. матрицы, представляющей конкуренцию A), которое представлено на рис. 10.

Решения, типа изображенного на рис. 10-11, называются *автоколебаниями* и принципиально отличаются от колебаний, рассмотренных нами ранее (численности хищника и жертвы в вольтерровской модели). Главное отличие заключается в том, что характеристики автоколебаний (амплитуда, частота, спектр) не зависят от начальных условий, а определяются исключительно параметрами самой динамической системы.

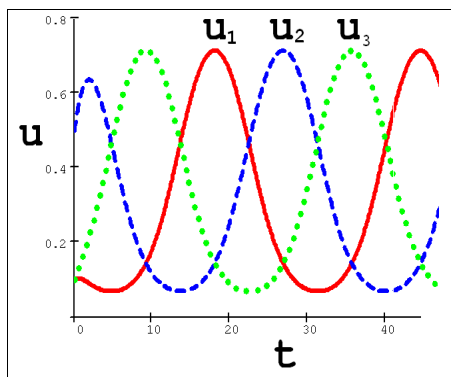


Рис. 10. Решение системы (14)

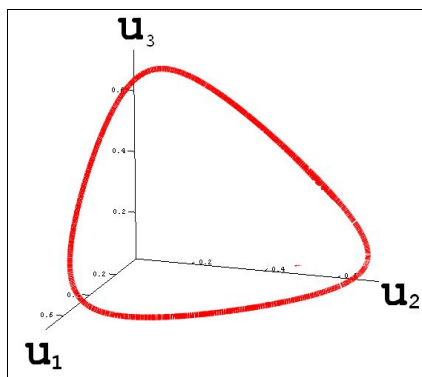


Рис. 11. Аттрактор (14)

Через некоторое время расчетов, независимо от начальных условий, решение выходит на один и тот же цикл колебаний, называемый *предельным циклом*. Аттрактор типа предельного цикла является замкнутой кривой на фазовой плоскости (рис. 11). К нему асимптотически притягиваются все окрестные траектории, выходящие из различных начальных точек, как изнутри, так и снаружи предельного цикла.

Более подробно о предельных циклах, и аттракторах вообще, написано в следующей главе. Забегая вперед, обратим внимание, что компактное изображение нескольких решений на одном графике (см. рис. 5) дает главное преимущество использования фазового пространства для визуализации ОДУ. А именно, один график может вместить целое множество решений ОДУ с различными начальными условиями, давая хорошее представление о поведении динамической системы.

Положительным аспектом является еще и тот факт, что для большинства ОДУ решения, выходящие из близких (а иногда и весьма отдаленных) начальных условий, демонстрируют очень похожее поведение. В частности, при $t \rightarrow \infty$ целые семейства решений асимптотически стремятся к аттракторам – стационарным точкам фазового пространства или (реже) определенным замкнутым кривым, т.е. предельным циклам.

Таким образом, зачастую задача исследования динамической системы сводится к качественному изучению зависимости решения системы ОДУ от начальных условий. Повторимся, что очень наглядным образом можно визуализировать такую информацию на фазовой плоскости. Каждое решение будет выходить из точки, координаты которой являются начальными условиями. Множество решений, вычисленное для всевозможных начальных условий, образует *фазовый портрет* динамической системы (см. §4.1).