Свойства определителей

Приведем в форме примеров основные свойства определителей (матрица, которая в них используется, может быть любой).

Пример 2.23. Определитель не меняется при транспонировании матрицы

$$\left|\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & -4 & -5 \\ 33 & 77 & 99 \end{pmatrix}\right| = -11 \qquad \left|\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & -4 & -5 \\ 33 & 77 & 99 \end{pmatrix}^{T}\right| = -11$$

Пример 2.24. Определитель меняет свой знак при смене мест пары строк (или столбцов) (исходная матрица взята из примера 2.22)

$$\left|\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & -3 & -5 \\ 77 & 33 & 99 \end{pmatrix}\right| = 11$$

$$\left|\begin{pmatrix} -3 & -4 & -5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 33 & 77 & 99 \end{pmatrix}\right| = 11$$

Пример 2.25. Определитель умножается на число k, если любой из столбцов (или строк) будет умножен на k

$$\left|\begin{pmatrix} k\cdot 1 & 0 & 0 \\ k\cdot -3 & -4 & -5 \\ k\cdot 33 & 77 & 99 \end{pmatrix}\right| \to -11\cdot k$$

$$\left|\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & -4 & -5 \\ k\cdot 33 & k\cdot 77 & k\cdot 99 \end{pmatrix}\right| \to -11\cdot k$$

Пример 2.26. Определитель с нулевым столбцом (или строкой) равен нулю

$$\left|\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -3 & -4 & -5 \\ 33 & 77 & 99 \end{pmatrix}\right| = 0$$

$$\left|\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -3 & -4 & 0 \\ 33 & 77 & 0 \end{pmatrix}\right| = 0$$

Пример 2.27. Определитель матрицы, у которой хотя бы два столбца (или две строки) равны, равен нулю

$$\left|\begin{pmatrix} -3 & -4 & -5 \\ -3 & -4 & -5 \\ 33 & 77 & 99 \end{pmatrix}\right| = 0$$

$$\left|\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & -4 & -4 \\ 33 & 77 & 77 \end{pmatrix}\right| = 0$$

Пример 2.28. Определитель матрицы, у которой хотя бы один столбец (или одна строка) равен линейной комбинации двух других столбцов (или, соответственно, строк), равен нулю

$$\left|\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & -4 & -5 \\ m\cdot 1 + k\cdot -3 & m\cdot 2 + k\cdot -4 & m\cdot 3 + k\cdot -5 \end{pmatrix}\right| \rightarrow 0$$

Пример 2.29. Определитель матрицы не изменяется, если к любому его столбцу (или строке) прибавить другой столбец (или, соответственно, строку), умноженный на любое число k

$$\left|\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & -4 & -5 \\ 33 & 77 & 99 \end{pmatrix}\right| \rightarrow -44$$

$$\left|\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 + k\cdot 1 & -4 + k\cdot 2 & -5 + k\cdot 3 \\ 33 & 77 & 99 \end{pmatrix}\right| \rightarrow -44$$

Пример 2.30. Определитель произведения матриц равен произведению их определителей: |A|·|B|=|A·B| (исходные матрицы взяты из примеров 2.22 и 2.28)

$$\left|\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & -4 & -5 \\ 33 & 77 & 99 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & -4 & -5 \\ 33 & 77 & 99 \end{pmatrix}\right| = 484$$

$$\left|\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & -4 & -5 \\ 33 & 77 & 99 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & -4 & -5 \\ 33 & 77 & 99 \end{pmatrix}\right| = 484$$

Замечание к примеру 2.30

Помните о правиле перемножения матриц *(см. разд. «Произведение матриц» этой главы и примеры 2.11-2.13)*.

Пример 2.31. Определитель единичной матрицы (любого размера) равен единице

Пример 2.32. Определитель ортогональной матрицы (любого размера) равен единице

$$Q := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad Q^T \cdot Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|Q| = 1$$