§4. Переопределенные СЛАУ

Как известно, для «хороших» систем линейных алгебраических уравнений (сокращенно, СЛАУ), т.е. описываемых квадратной хорошо обусловленной матрицей **A**, решение существует, единственно и может быть с легкостью найдено численно, например, методом Гаусса. Однако, как мы увидели в прошлых разделах, при обработке эксперимента чаще встречаются задачи, для которых матрица **A** либо не является квадратной, либо плохо обусловлена. Начнем разговор о «плохих» СЛАУ с переопределенных систем, в которых число уравнений больше числа неизвестных.

При наличии шума, СЛАУ с прямоугольной матрицей размера MxN (при M>N, т. е. при числе уравнений большем числа неизвестных) вовсе не имеет решения, т. е. является *несовместной*, или *переопределенной*. Конечно, в крайне редких случаях (в частности, при нулевом шуме) система с прямоугольной матрицей может оказаться совместной (если выбран соответствующий вектор **b**).

На практике (особенно в последнее время) задачи отыскания решения переопределенных СЛАУ встречаются довольно часто. Вернемся к простой интерпретации переопределенной задачи (10) из §1, связанной со взвешиванием предметов двух типов (одинаковых яблок и одинаковых груш). Пусть мы имеем три взвешивания:

$$\begin{aligned} x_1+2x_2&=51\\ 3x_1+4x_2&=109\\ 5x_1+6x_2&=172 \end{aligned} \cdot \tag{29}$$

Согласно (29), в первый раз на весы кладется одно яблоко и две груши, во второй – три яблока и четыре груши, и в третий – пять яблок и шесть груш.

Напрашивающийся сам собой путь решения нашего простого примера с грушами и яблоками является хорошей иллюстрацией подхода к общей проблеме переопределенных СЛАУ. А именно, вместо точного решения системы уравнений следует организовать поиск такого вектора **y**, который будет наилучшим образом удовлетворять всем уравнениям, т. е. минимизировать их невязку (расхождение между вектором **A·x** и вектором **b** правой части СЛАУ). Поскольку невязка **A·x–b** является векторной величиной, то, исходя из практических соображений, минимизации надо подвергать ее норму (т. е. скаляр)

$$|\mathbf{A}\cdot\mathbf{x}-\mathbf{b}|\sim\min. \qquad (30)$$

Этот подход позволяет, с одной стороны, получить разумное, с физической точки зрения, решение задачи, а, с другой – использовать полезную информацию, заключенную во всех уравнениях.

Таким образом, при интерпретации переопределенных СЛАУ принято искать не точное решение (которого, как уже отмечалось, при данной постановке задачи просто нет), а *псевдорешение* – вектор, минимизирующий норму невязки системы уравнений. Таким образом, задача решения линейной системы уравнений заменяется задачей отыскания глобального минимума функции $f(\mathbf{x})=|\mathbf{A}\cdot\mathbf{x}-\mathbf{b}|$. Повторимся, что **x** – это неизвестный вектор, а символ модуля (две вертикальные черты) означает операцию вычисления нормы (евклидовой длины вектора). Поскольку эта минимизируемая норма зависит от суммы квадратов компонент неизвестного вектора, то процедура поиска псевдорешения является ни чем иным, как реализацией метода наименьших квадратов (МНК).

График функции f(**x**) двух переменных $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ для системы (29) показан в виде трехмерной поверхности на рис. 14, а несколько его сечений в окрестности минимума – на рис. 15. Нетрудно сообразить, почему структура функции оказывается именно такой, если вспомнить, что f(x) является квадратичной формой относительно неизвестных x_1 и x_2.

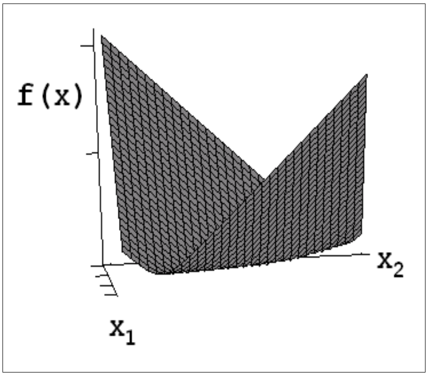

Рис. 14. *График функции невязки* $f(x)=|\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b}|$

Надо отметить, что если бы наша система имела большее число уравнений, то вычислительная задача соответствующим образом усложнилась бы, т. к. минимизацию следовало бы проводить не по двум, а по большему числу переменных.

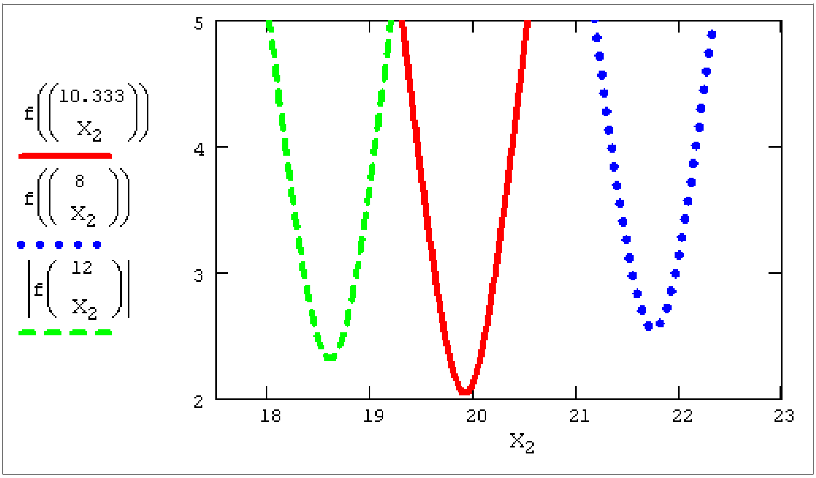

Рис. 15. *Сечения графика невязки f(x) для трех фиксированных значений* x_0

Обращаясь к практической стороне дела, следует отметить, что для численной минимизации функций обычно используются различные градиентные методы, схожие с методами решения нелинейных систем. Являясь итерационными, градиентные алгоритмы требуют задания некоторого начального приближения (нулевой итерации). На практике псевдорешение принято искать путем соответствующих матричных разложений (см. §10).

Подход к решению переопределенных систем может быть и несколько иным, если имеется дополнительная априорная информация (некоторая оценка неизвестного вектора x). Этот метод, общий для переопределенных и недоопределенных систем, будет изложен в следующем разделе.