Матричные нормы

Подобно тому, как мы определяли для векторов понятие нормы, введем в качестве скалярной числовой характеристики *норму* произвольной матрицы размера M×N. Норма матрицы отражает средний порядок величины матричных элементов. В результате мы будем иметь некоторую возможность сравнения матриц (которые, повторимся, являются не обычными числами, а таблицами) между собой.

Введем следующие виды норм для матриц.

- *Евклидовой нормой* (или *нормой Фробениуса*, или *нормой Шура*) матрицы **A** называется число:

$$\|\mathbf{A}\|_F = \sqrt{\sum_{j=1}^{M} \sum_{i=1}^{N} x_{ij}^2}\ .$$

- *L1-нормой* называется максимальная из 1-норм векторов, образованных столбцами матрицы:

$$\|\mathbf{A}\|_{L1} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|}$$

- *L2-нормой* называется максимальная из 2-норм (евклидовых длин) векторов, образованных столбцами матрицы:

$$\|\mathbf{A}\|_{L2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|}$$

- *max-нормой*, или *∞-нормой* называется максимальное из абсолютных значений элементов матрицы:

$$\|\mathbf{A}\|_\infty = \max_{i,j}\left(|x_{ij}|\right)$$

- *спектральной нормой* называется максимальная из всевозможных норм векторов **Ax** (для любого вектора **x**).

$$\|\mathbf{A}\|_S = \max_{\forall \mathbf{x}}\left(\frac{\|\mathbf{Ax}\|}{\|\mathbf{x}\|}\right)$$

Очевидно, что понятия евклидовой и max- норм действительны введенным ранее определениям этих норм для векторов (которые, повторимся, являются частными случаями матриц). Можно показать, что если в определении спектральной нормы подразумевать для векторов **x** и **Ax** 1-норму («манхэттенское расстояние»), то спектральная норма совпадает с определением L1-нормы.

Расчеты различных норм двух матриц **A** и **B** (при помощи встроенных функций Mathcad) с отличающимися на два порядка элементами приведены в примере 2.16. В большинстве задач неважно, какую норму использовать. Как видно, в обычных случаях разные нормы дают примерно одинаковые значения, хорошо отражая порядок величины матричных элементов. Пример 2.17 демонстрирует вычисление различных норм (в его последней строке пояснено определение евклидовой и L1-нормы).

Пример 2.16. Нормы матриц с элементами, различающимися по порядку величины

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 5 & -6 \\ -7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} 100 & 200 & 300 \\ -400 & 500 & -600 \\ -700 & 800 & 900 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{norm1}(A) = 18$ $\qquad$ $\mathrm{normi}(B) = 2.4 \times 10^{3}$

$\mathrm{normi}(A) = 24$ $\qquad$ $\mathrm{norm1}(B) = 1.8 \times 10^{3}$

$\mathrm{norm2}(A) = 14.213$ $\qquad$ $\mathrm{norm2}(B) = 1.421 \times 10^{3}$

$\mathrm{norme}(A) = 16.882$ $\qquad$ $\mathrm{norme}(B) = 1.688 \times 10^{3}$

$\max(A) = 9$ $\qquad$ $\max(B) = 900$

Пример 2.17. Определение норм матриц: Евклидова и L1 (продолжение примера 2.16)

$|3| + |-6| + |9| = 18$ $\qquad$ $\mathrm{norm1}(A) = 18$

$\mathrm{norme}(A) = 16.882$ $\qquad$ $\sqrt{\sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \left(A_{i,j}\right)^2} = 16.882$